

## CHAPITRE XVI

# THÉORIE DES ONDES DE DÉTONATION RÉELLES

### 1. PRÉSENTATION

La théorie des ondes de détonation réelles admet, comme le schéma ZND, que le front de détonation est suivi d'une zone de réaction de largeur finie, dans laquelle est dégagée progressivement une chaleur  $Q_0$ . Mais elle prend en compte les *données réelles* qui caractérisent les ondes observées, à savoir :

- la forme du front, qui peut être convexe, concave ou plan.
- la variation éventuelle de la vitesse de détonation au cours de la propagation.

De ce fait, l'évolution hydrodynamique ( $p, v, u$ ) dans la zone de réaction n'obéit plus aux relations de choc (XV, 1) de la théorie classique, mais à des *équations différentielles* où apparaissent automatiquement le rayon de courbure du front et la variation de  $D$ . Dans le plan ( $p, v$ ), cette évolution se fait le long d'une courbe appelée *courbe de combustion*, qui dans la quasi-totalité des cas est distincte de la droite polaire.

La libération d'énergie chimique est caractérisée par un paramètre unique  $\lambda$  qui varie de 0 à 1. Suivons une *ligne de courant*, c'est-à-dire la trajectoire d'un élément explosif après le passage du front de détonation. Au front ( $\lambda = 0$ ), on a toujours  $(u + c)_F > D$ ,  $D$  étant la vitesse locale de détonation. On montrera que la zone de réaction est le siège d'une détente : lorsque  $\lambda$  croît,  $u$  et  $p$  (et donc  $c$ ) décroissent. L'analyse des équations de l'écoulement montre alors que le point d'équilibre thermochimique en fin de réaction, ou *état de détonation* ( $\lambda = 1$ ), est distinct du point où  $u + c = D$ , appelé *point sonique*, et que celui-ci est à une *distance finie du front*, aussi petite soit-elle.

Deux types d'ondes de détonation sont mis en évidence :

– celles pour lesquelles le point sonique est à l'intérieur de la zone de réaction :

$$(u + c)_S = D, \quad \lambda_S < 1, \quad \left(\frac{d\lambda}{dt}\right)_S > 0$$

Pour  $\lambda = 1$ , on a alors  $(u + c)_N < D$  : l'état de détonation est *supersonique*. Ces ondes sont appelées *ondes explosives*.

– celles pour lesquelles le point sonique est à l'extérieur de la zone de réaction. Pour  $\lambda = 1$ , on a  $(u + c)_N > D$ . L'état de détonation est *subsonique*, et le point sonique est atteint au-delà.

La distinction entre les deux types d'onde repose essentiellement sur le signe de la courbure du front. Les ondes explosives ont un front convexe, les ondes du deuxième type ont un front concave ou plan, et leur vitesse est supérieure à la vitesse limite des ondes explosives. C'est pourquoi on les appelle *détonations fortes*.

La limite est l'*onde idéale*, de vitesse  $D_i$ , définie par les propriétés suivantes :

- c'est une onde plane.
- le point sonique et l'état de détonation sont confondus. Elle est donc la seule à obéir à la relation CJ.

Pour les ondes explosives,  $D < D_i$ , et pour les détonations fortes,  $D > D_i$ .

## 2. ÉQUATIONS DE L'ÉCOULEMENT DANS LA ZONE DE RÉACTION

Les équations de l'hydrodynamique, déjà écrites à plusieurs reprises, sont, dans un système d'axes fixes :

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = 0 \\ \rho \frac{d\vec{u}}{dt} + \operatorname{grad} p = 0 \end{cases} \quad (1)$$

avec :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \operatorname{grad}.$$



Ces équations gouvernent l'écoulement dans la zone de réaction. L'état initial du milieu réactif est l'état F au front qui, lui, satisfait aux relations de conservation du choc.

On peut décrire correctement le comportement des détonations réelles en se limitant aux deux géométries principalement rencontrées : les ondes monodimensionnelles (planes, cylindriques, sphériques, divergentes ou convergentes), et les ondes de révolution autour d'un axe, à front convexe ou concave.

La courbure du front est introduite en développant l'expression de  $\text{div } \vec{u}$ . La variation éventuelle de la vitesse du front est prise en compte en faisant appel à une dérivée déjà utilisée au chapitre V, qui était la dérivée au front :

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{D} \cdot \text{grad}$$

mais cette fois, *on l'étend à tout le champ de la zone de réaction*, selon des modalités qui seront précisées.

### Ondes monodimensionnelles.

L'écoulement est repéré sur un axe fixe  $Ox$ ,  $O$  étant le centre de courbure éventuel. On désigne par  $\vec{n}$  le vecteur unitaire de la normale au front, *orienté dans le sens du mouvement*, de sorte que :

$$\vec{D} = D\vec{n}, \quad \vec{u} = u\vec{n}, \quad \text{avec } D \text{ et } u > 0$$

On a :

$$\text{div } \vec{u} = \vec{n} \cdot \text{grad } u + u \text{div } \vec{n},$$

et :

$$\text{div } \vec{n} = \pm \frac{\alpha}{x} \quad (\alpha = 0, 1, 2)$$

le signe + concernant l'écoulement divergent, et le signe - l'écoulement convergent.

Les équations (1) s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} + \rho \vec{n} \cdot \text{grad } u + \rho u \text{div } \vec{n} = 0 \\ \rho \frac{du}{dt} + \vec{n} \cdot \text{grad } p = 0 \end{cases} \quad (2)$$

La dérivée  $\frac{\delta}{\delta t}$  est définie par :

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + D\vec{n} \cdot \text{grad}$$

avec  $D$  constant le long d'une trajectoire matérielle ( $\Gamma$ ) donnée, soit :

$$\frac{dD}{dt} = 0$$

La variation de  $D$  le long du front est  $\frac{\delta D}{\delta t}$ .

$\frac{\delta}{\delta t}$  représente la variation d'une grandeur le long d'une courbe ( $C'$ ) qui a en tout point  $M$  de ( $\Gamma$ ) la même pente  $\frac{\delta x}{\delta t} = D$  qu'en  $F$  (fig. XVI-1).

Si  $M$  est dans la zone de réaction, cette variation suit, à un facteur quasiment constant près, la variation de la même grandeur en  $F$ , c'est-à-dire la dérivée au front proprement dite, et elle est bien entendu de même signe.

Si la vitesse du front est constante, les  $\frac{\delta}{\delta t}$  sont identiquement nuls.

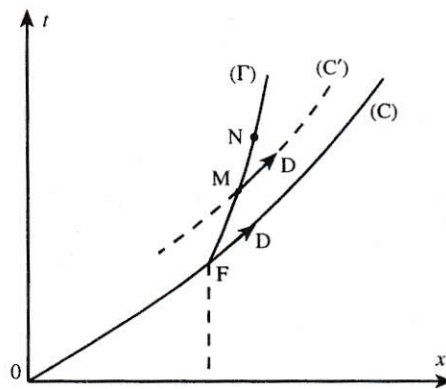


FIG. XVI-1.

Entre les deux dérivées le long de ( $\Gamma$ ) et le long de ( $C'$ ), on a la relation :

$$(D - u)\vec{n} \cdot \text{grad} = \frac{\delta}{\delta t} - \frac{d}{dt}$$

Celle-ci permet d'éliminer les  $\vec{n} \cdot \text{grad}$  des équations (2). D'où :

$$\frac{d}{dt} [\rho(D - u)] = -\rho \frac{\delta u}{\delta t} - \rho u(D - u) \text{div } \vec{n} \quad (3)$$

$$\frac{dp}{dt} - \rho(D - u) \frac{du}{dt} = \frac{\delta p}{\delta t} \quad (4)$$

et par élimination de  $du/dt$  :

$$\left[ \frac{dp}{dv} + \rho^2 (D - u)^2 \right] \frac{dv}{dt} = \frac{\delta p}{\delta t} + \rho (D - u) \frac{\delta u}{\delta t} + \rho u (D - u)^2 \operatorname{div} \vec{n} \quad (5)$$

### Ondes de révolution autour d'un axe.

Nous expliciterons les équations concernant tout le champ de l'écoulement dans le chapitre consacré à l'ORP. Nous montrerons alors que ses propriétés hors de l'axe sont les mêmes que sur l'axe. Il suffit donc ici de se limiter à l'écoulement sur l'axe.

Les équations sur l'axe d'une onde de révolution sont identiques aux équations (3), (4), (5), avec les mêmes notations et la même définition de  $\frac{\delta}{\delta t}$ . La seule différence (faible) porte sur le coefficient de  $\operatorname{div} \vec{n}$  dans (3) et (5), où le facteur  $u$  doit être remplacé par une valeur  $m$  voisine ( $m$  étant égal à  $u$  au front).

Pour une onde de révolution :

$$\operatorname{div} \vec{n} = \pm \frac{2}{R_c}$$

$R_c$  étant le rayon de courbure (positif) du front sur l'axe, le signe + concernant l'onde convexe et le signe - l'onde concave.

### Discussion.

Aux premiers membres de (3) et (4) apparaissent les « invariants » de la théorie classique (ZND) :

$$\rho(D - u) = C^{te} = \rho_0 D, \quad p - \rho_0 D u = C^{te} = p_0$$

Or il est clair que ces quantités ne sont des invariants que si les seconds membres sont identiquement nuls. Pour cela, il faut deux conditions, qui doivent être remplies toutes les deux :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{n} = 0, & \text{donc onde plane,} \\ \frac{\delta}{\delta t} \equiv 0, & \text{donc onde de vitesse constante.} \end{cases}$$

Ce sont du reste les hypothèses de la théorie ZND. Ces conditions ne sont réunies que par l'onde idéale, et dans la pratique, par l'onde plane amorcée par un GOP, ou par l'onde de surdétonation plane avant rattrapage par les détonations arrière.



Pour toutes les autres ondes de détonation réelles, il manque une condition, ou les deux : ou bien l'onde n'est pas plane, ou bien sa vitesse varie, même peu. Certes, les seconds membres de (3) et (4) ont des valeurs faibles devant les invariants, mais ils ne sont pas nuls. Il en est de même du second membre de (5).

En conséquence, on a dans le cas général, sauf au front :

$$\begin{array}{l} \rho(D - u) \neq \rho_0 D \\ p - p_0 \neq \rho_0 D u \\ \frac{p - p_0}{v_0 - v} \neq \rho_0^2 D^2 \end{array} \quad (6)$$

Les relations de choc cessent d'être valables dès que l'on s'éloigne du front dans la zone de réaction d'une onde de détonation réelle. Dans le plan  $(p, v)$ , la courbe de combustion est distincte de la droite polaire, et l'état de détonation n'est pas sur la droite polaire.

Dans l'ORP par exemple, on peut montrer que :

$$1 - \left[ \frac{\rho(D - u)}{\rho_0 D} \right]_N \sim \frac{a}{R_c}$$

$a$  étant la largeur de la zone de réaction.

Les inégalités (6) ne sont des égalités que pour les deux cas d'onde plane mentionnés plus haut.

### 3. ÉQUATION D'ÉNERGIE DANS LA ZONE DE RÉACTION. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE DES ONDES DE DÉTONATION RÉELLES

L'équilibre thermodynamique d'un milieu est obtenu par équipartition de l'énergie sur les divers degrés de liberté des particules par le jeu des chocs qu'elles font entre elles. Les chocs inertes ( $\text{CO}_2$  sur  $\text{N}_2$  par exemple) sont beaucoup plus fréquents que les chocs réactifs, de sorte que la constante de temps de l'équipartition est négligeable devant la durée des réactions chimiques. On peut donc considérer que le milieu dans la zone de réaction est à *tout instant* en équilibre thermodynamique (mais pas en équilibre chimique), ce qui permet de définir les grandeurs d'état à  $t$  donné, puis l'énergie thermique  $e(p, v)$ , l'entropie  $S$  et la vitesse du son  $c$ .

Quelle que soit la cinétique des réactions, on peut caractériser leur degré d'avancement par un paramètre unique  $\lambda(t)$ , à savoir le *taux de libération d'énergie chimique* défini au chapitre XII par :

$$\lambda = \frac{Q(t)}{Q_0}$$

$Q(t)$  étant l'énergie dégagée à l'instant  $t$  et  $Q_0$  la chaleur de détonation.  $\lambda$  varie de 0 (état F) à 1 (état de détonation N). Pour  $\lambda = 1$ , on a  $\frac{d\lambda}{dt} = 0$  comme nous l'avons montré au chapitre XII.

L'énergie interne du milieu à l'instant  $t$  vaut :

$$E = e(p, v) - \lambda Q_0$$

et comme l'écoulement est adiabatique ( $dE + p dv = 0$ ), on a :

$$de + p dv = Q_0 d\lambda = T dS$$

L'entropie du milieu croît de F à N.

On introduit le coefficient de Grüneisen  $g$  et la vitesse du son  $c$  :

$$\frac{v}{g} = \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_v, \quad p + \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_p = \rho^2 c^2 \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)_v$$

D'où l'équation d'énergie dans la zone de réaction :

$$\boxed{\frac{dp}{dt} + \rho^2 c^2 \frac{dv}{dt} = \rho g Q_0 \frac{d\lambda}{dt}} \quad (7)$$

Certains auteurs introduisent un coefficient de thermicité  $\sigma$  :

$$\sigma c^2 \equiv g Q_0$$

On écrit (7) sous la forme :

$$\boxed{\left(\frac{dp}{dv} + \rho^2 c^2\right) \frac{dv}{dt} = \rho g Q_0 \frac{d\lambda}{dt}} \quad (8)$$

$dp/dv$  est la pente du lieu de l'état  $(p, v)$  d'un élément matériel donné dans la zone de réaction, c'est-à-dire de la *courbe de combustion*. Mais selon les conventions de signe que nous avons adoptées depuis le début de ce livre, nous posons :

$$\left(-\frac{dp}{dv}\right)_T = \text{pente de la courbe de combustion}$$

de façon à avoir une valeur positive, comparable à  $\rho_0^2 D^2$  par exemple.



Tant que  $d\lambda/dt > 0$ , les deux termes du premier membre de (8) ne peuvent s'annuler et gardent le même signe qu'au front. Or au front :

$$\left(-\frac{dp}{dv}\right)_F \neq \rho_0^2 D^2 < (\rho^2 c^2)_F \quad \text{puisque } D - u < c \text{ en F}$$

Le premier terme étant positif au front et devant garder son signe, il en est de même du second, soit :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} > 0} \quad \boxed{\frac{dp}{dt} < 0}$$

**La zone de réaction est le siège d'une détente, de F vers N.**

Compte-tenu de la faible importance relative des termes  $\delta p/\delta t$  et  $\text{div } \vec{n}$ , les équations (4) et (2) montrent que l'on a aussi :

$$\boxed{\frac{du}{dt} < 0} \quad \boxed{\vec{n} \cdot \text{grad } u > 0}$$

Rappelons que  $\vec{n} \cdot \text{grad } u = \pm \frac{\partial u}{\partial x}$  selon que l'onde est divergente ou convergente.

Lorsque  $\lambda = 1$ ,  $\frac{d\lambda}{dt} = 0$ . L'un des deux termes du premier membre de (8) doit s'annuler. L'équation (5) montre que ce ne peut être  $dv/dt$ , car son second membre est différent de zéro dans le cas général. Donc c'est le premier terme :

$$\boxed{\left(-\frac{dp}{dv}\right)_N = (\rho^2 c^2)_N} \quad (9)$$

D'où la propriété fondamentale :

**La courbe de combustion est tangente en N à l'isentropique des produits de détonation à l'équilibre.**

Cette propriété est valable pour toutes les ondes de détonation réelles, explosives ou non, contrairement à la théorie classique où elle ne l'est que pour l'onde idéale. Par sa généralité, elle est plus intéressante que la relation CJ. Elle est la conséquence du fait que lorsqu'une réaction chimique tend vers un état d'équilibre, la variation d'entropie tend vers zéro.

Au-delà de N, l'élément est soumis aux détentes extérieures, et son état évolue le long de l'isentropique ( $S_N$ ), sans discontinuité de pente avec la courbe de combustion.



#### 4. POINT SONIQUE. ÉQUATION D'ÉVOLUTION DU CHOC

Nous allons maintenant montrer, à l'aide des équations qui viennent d'être écrites, que le partage des ondes de détonation réelles en deux grandes classes, tel qu'il a été présenté au chapitre XIII, correspond à une sonicité différente de l'état de détonation, et que celle-ci est liée directement au signe de la courbure du front.

En éliminant  $dp/dv$  entre les équations (5) et (8), on obtient d'abord la relation :

$$\rho^2 [c^2 - (D - u)^2] \frac{dv}{dt} = \rho g Q_0 \frac{d\lambda}{dt} - (A + B) \quad (10)$$

avec :

$$\begin{cases} A = \frac{\delta p}{\delta t} + \rho(D - u) \frac{\delta u}{\delta t} \\ B = \rho u (D - u)^2 \operatorname{div} \vec{n} \end{cases}$$

Les termes A et B sont introduits pour la simplification de l'écriture. Ce sont les facteurs représentatifs des ondes réelles introduits dans la présente théorie : variation de la vitesse de détonation et courbure du front. Ils peuvent être positifs ou négatifs selon le type d'onde. Leur valeur est faible devant les autres termes de (10). Dans la théorie ZND, ils sont supposés nuls.

Au front, on a toujours  $u + c > D$  puisque le front est une onde de choc pure, où aucune énergie chimique n'a encore été libérée. Lors de la détente dans la zone de réaction,  $u$  et  $c$  décroissent simultanément, de sorte que sur toute trajectoire matérielle, il existe quelque part un point S où  $u + c = D$ , ou *point sonique*. Les gradients n'étant pas infinis, ce point est à *distance finie du front*. Le problème est de déterminer sa position par rapport au point N qui représente l'état de détonation.

Au point N,  $d\lambda/dt = 0$ , et la relation (10) donne :

$$\rho^2 [c^2 - (D - u)^2]_N \cdot \left( \frac{dv}{dt} \right)_N = - (A + B)_N \quad (11)$$

Dans le cas général,  $(A + B)_N \neq 0$ , d'où  $c_N \neq D - u_N$ . Il y a toutefois le cas particulier de l'onde plane ( $B = 0$ ) de vitesse constante ( $A = 0$ ), qui entre dans le cadre des hypothèses de la théorie ZND. Or celle-ci nous dit que  $c_N > D - u_N$  [l'équation (11) donne alors  $(dv/dt)_N = 0$ ], sauf si N est en J.

Donc, sauf pour l'onde idéale, l'état de détonation n'est jamais sonique. Sur la trajectoire matérielle, les points S et N sont toujours distincts. Le point sonique peut se trouver soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de la zone de réaction.

On poursuit la discussion en donnant une forme plus significative à l'équation (10). Pour cela, on remplace  $\rho^2 dv/dt = -dp/dt$  par son expression (2), d'où l'équation :

$$\frac{\delta p}{\delta t} + \rho(D - u) \frac{\delta u}{\delta t} = \rho g Q_0 \frac{d\lambda}{dt} - \rho c^2 (\eta \vec{n} \cdot \text{grad } u + u \text{ div } \vec{n}) \quad (12)$$

avec :  $\eta = 1 - \frac{(D - u)^2}{c^2} = \text{coefficient de sonicité.}$

Cette équation s'appelle *équation d'évolution du choc*. Elle est analogue à l'équation (V, 14) écrite pour les chocs en milieu inerte, mais ici apparaît un terme supplémentaire en  $Q_0$ , représentant l'apport d'énergie chimique.

Le premier membre, qui est défini en tout point de la zone de réaction, est du signe de  $\delta D/\delta t$ , et donne le sens de l'évolution du choc.

Le second membre est un bilan d'énergie. Le premier terme représente le taux de libération d'énergie chimique ; le second représente le flux d'énergie mécanique et thermique transporté vers l'arrière par le jeu de la détente dans la zone de réaction. Un déséquilibre de ce bilan a pour effet de rendre négatif ou positif le premier membre, donc de ralentir ou d'accélérer le front de détonation.

### Ondes explosives.

Si le point sonique est à l'intérieur de la zone de réaction, c'est-à-dire si l'état de détonation est supersonique, aucune onde sonique extérieure ne peut atteindre le front et modifier les conditions de propagation. Celle-ci est autonome, c'est-à-dire réglée uniquement par les propriétés physico-chimiques de l'explosif et la géométrie de l'échantillon. Si ces données sont constantes, la vitesse de détonation est constante. S'il apparaît des modifications dans les dimensions de l'échantillon, telles que le rétrécissement du diamètre d'une cartouche, ou un tournant



à angle droit, la vitesse diminue localement, mais tend rapidement vers une nouvelle valeur constante. Une onde qui jouit de ces propriétés est dite *onde explosive* (au sens où Jouguet l'entendait initialement). Avec les notations employées ci-dessus, ses critères de définition sont :

$$A_N \neq 0, \quad \eta_N < 0$$

L'onde explosive correspond à un équilibre du bilan d'énergie du second membre de l'équation (12), qui permet aux  $\delta/\delta t$  d'être nuls ou de le redevenir rapidement. Et cet équilibre est *stable* car il n'est pas affecté par les détentes extérieures. L'autonomie de la propagation est ainsi étroitement liée à l'équilibre des transferts d'énergie dans la zone de réaction.

Écrivons l'équation (12) pour l'état de détonation :

$$A_N = \left[ \frac{\delta p}{\delta t} + \rho(D-u) \frac{\delta u}{\delta t} \right]_N = -\rho c^2 (\eta_N \vec{n} \cdot \text{grad } u + u \text{ div } \vec{n}) \quad (13)$$

Compte-tenu des critères ci-dessus, et sachant que  $\vec{n} \cdot \text{grad } u$  est toujours positif, il est alors nécessaire que  $\text{div } \vec{n}$  soit positif. Par conséquent :

**Toute onde explosive a un front convexe.**

Réciproquement :

**Toute onde convexe est explosive, c'est-à-dire supersonique.**

En effet, si elle ne l'était pas, on aurait simultanément  $\text{div } \vec{n} > 0$  et  $\eta_N > 0$ , et la relation (13) donnerait  $A_N < 0$  : l'onde ralentirait au cours de sa progression, ce qui est vrai pour une onde de choc en milieu inerte, mais qui est manifestement contraire aux faits expérimentaux pour une onde de détonation à front convexe.

Le point sonique étant à l'intérieur de la zone de réaction, on a  $\lambda_S < 1$ . L'énergie chimique n'a pas été totalement libérée au point S. Dans le cas d'une onde de vitesse rigoureusement constante ( $A = 0$ ), l'équation (12) donne :

$$gQ_0 \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)_S = c^2 u \text{ div } \vec{n} > 0 \quad (14)$$

L'onde explosive limite est l'onde idéale, pour laquelle l'état de détonation est sonique. Les points N et S sont confondus en le seul point J :

$$\eta_J = 0, \quad \text{div } \vec{n} = 0, \quad A_J = 0, \quad \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)_J = 0$$

### Ondes non explosives.

Par exclusion, ce sont les ondes concaves et planes (sauf l'onde idéale). On serait tenté de dire qu'elles correspondent à un *déséquilibre* du bilan énergétique de l'équation (12). Ce n'est que partiellement exact, car il y a aussi les cas de l'*équilibre instable*, ou d'un *équilibre provisoire*. Cette instabilité est due à la sensibilité de ces ondes à l'effet des détente extérieures, donc à un *état de détonation subsonique*.

La subsonicité de l'état de détonation dans les ondes concaves et planes ne se démontre pas, mais se déduit, via la relation (13), des variations de  $D$  observées expérimentalement. Examinons les différents cas.

#### a) Onde de surdétonation plane.

Si l'on se reporte au mode de génération de la surdétonation plane (chapitre XIII), on note que la propagation se fait en deux phases :

– **phase 1** : la vitesse  $D$ , supérieure à  $D_i$ , reste constante. L'onde obéit alors à la théorie ZND. Donc :

$$c_N > D - u_N, \quad \text{soit} \quad \eta_N > 0 \quad (\text{état N subsonique})$$

Comme  $A_N = 0$  le bilan d'énergie dans la zone de réaction est en équilibre, mais en équilibre provisoire. La solution de l'équation (13) est  $(\vec{n} \cdot \text{grad } u)_N = 0$  et celle de l'équation (11) est  $(dv/dt)_N = 0$ , résultats équivalents d'après (2). Le profil de l'onde présente un palier de pression entre N et le front des détente venant de l'arrière (fig. XVI-2 à gauche).

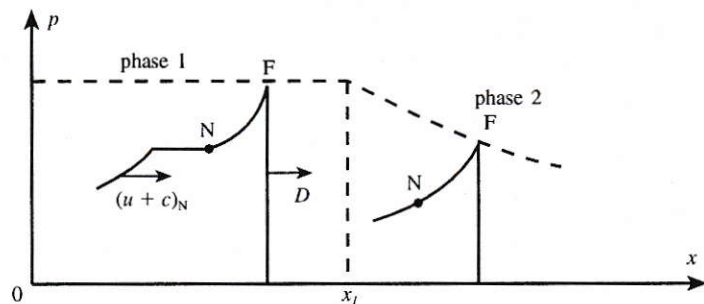


FIG. XVI-2.

– **phase 2** : les détente arrière ont rattrapé l'onde et pénétré dans la zone de réaction, modifiant le terme en  $\text{grad } u$ , d'où déséquilibre du bilan. Le front ralentit, la pression en F diminue, ainsi que l'ensemble du profil (fig. XVI-2 à droite).



**b) Ondes concaves.**

On a : 
$$\operatorname{div} \vec{n} = -\frac{\alpha}{R} \quad (\alpha = 1 \text{ ou } 2)$$

$R$  étant le rayon du front dans le cas d'une onde monodimensionnelle, et le rayon de courbure du front sur l'axe dans celui d'une onde de détonation de Mach.

On écrit alors l'équation (13) sous la forme :

$$A_N = \rho c^2 \left( \frac{\alpha u}{R} - \eta_N \vec{n} \cdot \operatorname{grad} u \right)$$

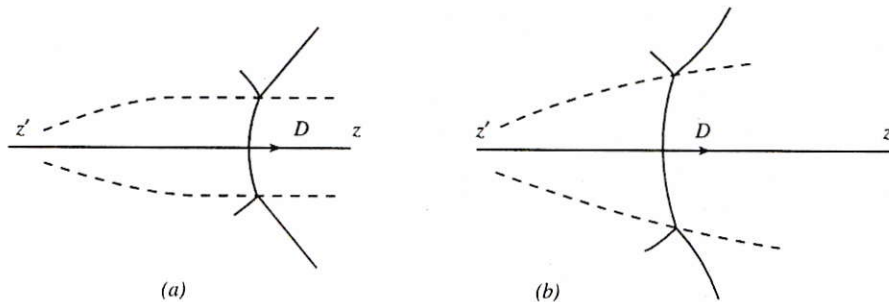


FIG. XVI-3.

Pour l'onde de détonation de Mach, deux cas sont possibles :

– si l'onde est créée par la rencontre de deux ondes planes (fig. XVI-3-a), la propagation tend vers un régime quasi-permanent. L'onde de Mach est cylindrique,  $z'z$  étant le plan de symétrie. On a :

$$\alpha = 1, \quad A_N \neq 0, \quad \text{d'où} \quad \eta_N > 0$$

– si l'onde est créée par deux ondes convexes (fig. XVI-3-b) ou par une onde conique, elle s'élargit et sa vitesse sur l'axe diminue :  $A_N < 0$ , d'où  $\eta_N > 0$ .

Pour l'onde sphérique convergente, l'expérience montre que la vitesse  $D$  croît au cours de la propagation vers le centre. Mais cette croissance est faible durant une grande partie du parcours, soit :

$$A_N \geq 0 \quad \text{avec} \quad \alpha = 2$$

Ceci prouve que le terme en  $\eta_N$  compense partiellement le terme en  $1/R$ , donc qu'il est positif. Ce n'est que lorsque  $R$  tend vers zéro que le premier terme devient prépondérant et que l'accélération est sensible.

Si  $\eta_N$  était négatif (état N supersonique),  $A_N$  prendrait dès le début une valeur positive élevée, et la loi  $D(R)$  serait très différente de la loi expérimentale.

On peut donc dire que *l'expérience montre* que l'état de détonation des ondes concaves et planes est subsonique.

\*

\*\*

En résumé, le lien entre le sens de la courbure du front et la soni-  
cité de l'état de détonation apparaît bien établi, et sert à classer les ondes  
réelles en deux types :

– *les ondes explosives* : front convexe, point sonique à l'intérieur de  
la zone de réaction. Vitesse de détonation quasi-constante.

– *les ondes non explosives* : front concave ou plan, point sonique à  
l'extérieur de la zone de réaction. Vitesse en général variable, ou bien  
constante à titre provisoire.

Il reste à démontrer que  $D < D_i$  pour les ondes explosives, et  
 $D > D_i$  pour les autres, d'où leur nom de détonations fortes. Cela sera  
fait par l'étude de la courbe de combustion et l'analyse de sa position  
dans le plan  $(p, v)$ .

## 5. COURBE DE COMBUSTION

La courbe de combustion ( $\Gamma$ ) est le lieu des états  $(p, v)$  dans la zone  
de réaction des ondes de détonation réelles. Nous avons montré plus  
haut que, dans le cas général, elle était distincte de la droite polaire. Le  
problème est de préciser sa position par rapport à cette droite, ainsi que  
la position du point N, état de détonation, par rapport à la courbe de  
Crussard, courbe de référence de la théorie classique. La discussion de  
ces deux points utilise les équations de l'écoulement (3) et (5) :

$$\left\{ \frac{d}{dt} [\rho(D-u)] = -\rho \frac{\delta u}{\delta t} - \rho u(D-u) \operatorname{div} \vec{n} \right. \quad (3)$$

$$\left. \left[ \frac{dp}{dv} + \rho^2(D-u)^2 \right] \frac{dv}{dt} = \frac{\delta p}{\delta t} + \rho(D-u) \frac{\delta u}{\delta t} + \rho u(D-u)^2 \operatorname{div} \vec{n} \right. \quad (5)$$

### 1 - Ondes explosives.

Ce sont des ondes convexes ( $\operatorname{div} \vec{n} > 0$ ). Pour l'ORP, les  $\delta/\delta t$  sont  
identiquement nuls, et pour l'OSD, très légèrement positifs et tendant  
vers zéro.



Le second membre de (3) est négatif et celui de (5) positif. D'où les inégalités :

$$\left( -\frac{dp}{dv} \right)_\Gamma < \rho^2(D-u)^2 \leq \rho_0^2 D^2 \quad (15)$$

Au front :  $\rho(D-u)_F = \rho_0 D$ , mais  $\left( -\frac{dp}{dv} \right)_F < \rho_0^2 D^2$

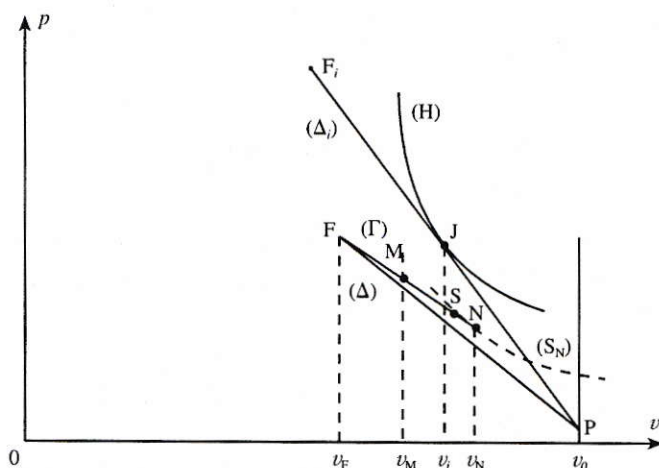


FIG. XVI-4.

Les inégalités (15) montrent que :

**La courbe de combustion d'une onde explosive est toute entière au-dessus de la droite polaire, et ne lui est pas tangente en F.**

Elle est représentée sur la fig. XVI-4 ainsi que la courbe de Crussard (H). Les écarts ont été exagérés pour les besoins de la figure.

En N, (Gamma) est tangente à l'isentropique (S\_N) conformément à la relation (9). Hors zone de réaction, la détente se poursuit le long de (S\_N).

Le point sonique S est au-dessus de N. La courbe de combustion n'est pas tangente à l'isentropique qui passe par S, et on a :

$$\left[ \left( -\frac{dp}{dv} \right)_\Gamma \right]_S < (\rho^2 c^2)_S < \rho_0^2 D^2$$

Intégrons l'équation d'énergie  $de + p dv = Q_0 d\lambda$  le long de (Gamma), depuis le point F ( $\lambda = 0$ ) jusqu'à un point M ( $\lambda = \lambda_0 \leq 1$ ) :

$$\begin{cases} e_M - e_F + \text{aire sous } \overline{FM} = \lambda_0 Q_0 \\ e_F - e_0 = \text{aire du trapèze } \overline{FP} \quad (\text{relation d'Hugoniot}) \end{cases}$$

d'où :  $e_M - e_0 - \lambda_0 Q_0 = \text{aire du trapèze } \overline{FP} - \text{aire sous } \overline{FM}$

La différence des deux aires est inférieure à l'aire du trapèze  $\overline{MP}$  puisque l'arc  $\overline{FM}$  est au-dessus de  $(\Delta)$ . En reprenant la fonction  $H(p, v)$  définie en (XV, 9) dans le paragraphe consacré à la théorie ZND, on a :

$$H_M = e_M - e_0 - Q_0 - \frac{1}{2} (p + p_0)(v_0 - v)_M < - (1 - \lambda_0) Q_0$$

Quel que soit  $\lambda_0$ , le point M est dans la zone  $H < 0$ . En particulier, pour l'état de détonation, on a :

$$E_N - E_0 = e_N - e_0 - Q_0 < \frac{1}{2} (p + p_0)(v_0 - v)_N$$

**La relation d'Hugoniot n'est pas valable pour l'état de détonation d'une onde explosive.**

En poursuivant l'intégration le long de  $(S_N)$ , on montre que  $(S_N)$  est également dans la zone  $H < 0$ . Il en est évidemment de même de la droite polaire  $(\Delta)$ . D'où :

$$S_N < S_i$$

et

$$D < D_i$$

La multiplicité des vitesses de détonation d'ondes explosives, mesurées sur des cartouches de différents diamètres, et le fait qu'elles aient une limite *supérieure* se trouvent ainsi expliqués.

Enfin, en appliquant à l'état N l'inégalité (15), on a :

$$\left( -\frac{dp}{dv} \right)_N = (\rho^2 c^2)_N < \rho^2 (D - u)_N^2$$

soit :

$$D - u_N > c_N$$

inégalité qui confirme que l'état de détonation d'une onde explosive est supersonique.

#### **Onde idéale.**

On peut considérer l'onde idéale comme la limite d'une ORP de rayon de courbure infini (ou de diamètre infini). Si  $\delta/\delta t = 0$  et  $\text{div } \vec{n} \rightarrow 0$ , les inégalités (15) tendent vers des égalités.

A la limite, la courbe de combustion est confondue avec le segment  $F_i J$  de la droite polaire  $(\Delta_i)$

\*

\* \*



Le lieu des états de détonation des ondes explosives d'un type donné (lieu des points N) est une courbe du plan  $(p, v)$  dont le sommet est le point J. Cette courbe dépend du type d'onde considéré : elle n'est pas la même pour l'onde sphérique divergente et pour l'ensemble des ORP. En outre, chacune de ces courbes est distincte de la courbe de Crussard ; leur seul point commun est le point J.

Pour une onde explosive de géométrie simple donnée (OSD ou ORP sur l'axe), il est possible de calculer la courbe de combustion et l'état N en fonction de la vitesse  $D$ , ainsi que toutes les grandeurs associées. Pour cela, on intègre (numériquement) les équations de l'écoulement et d'énergie, mais il faut se donner deux choses :

- l'équation d'état du milieu dans la zone de réaction.
- une loi de cinétique chimique  $\lambda(t)$ .

Un exemple de ce calcul est donné en [Réf. 27], dans le cas de l'axe d'une ORP et avec une équation d'état à  $\gamma$  constant. Le calcul est fait pour des ORP de vitesses  $D$  différentes. Afin d'illustrer l'ordre de grandeur de l'écart entre un état N et l'état J, nous extrayons de la référence citée le point :

$$\frac{D}{D_i} = 0,96, \quad \frac{p_N}{p_i} = 0,92, \quad \frac{v_N}{v_i} = 1,015 \left( \frac{v_N}{v_0} = 0,761 \text{ avec } \frac{v_i}{v_0} = 0,75 \right)$$

Toutefois, le choix d'une équation d'état à  $\gamma$  constant est assez contestable. Il est vraisemblable que le  $\gamma$  défini par :

$$\gamma = 1 + \frac{pv}{e}$$

varie sensiblement entre les points F et N.

\*  
\*\*

## 2 - Détonations fortes.

L'état de détonation étant subsonique, la relation (11) montre que  $(A + B)_N < 0$ . Comme  $(A + B)$  ne change pas de signe dans la zone de réaction, on a partout :

$$A + B < 0$$

Désignons par  $C$  le second membre de l'équation (3). Pour l'onde de surdétonation plane,  $\text{div } \vec{n} = 0$  et  $\delta/\delta t < 0$  (phase 2), d'où  $C > 0$ . Pour l'onde de détonation de Mach,  $\text{div } \vec{n} < 0$  et  $\delta/\delta t \leq 0$ , d'où  $C > 0$ . Pour l'onde sphérique convergente, on a avec (5) :

$$C = \frac{1}{D-u} \left[ \frac{\delta p}{\delta t} - (A+B) \right] > 0 \quad \text{puisque} \quad \delta p/\delta t > 0.$$

Dans tous les cas, le second membre de (3) est positif et celui de (5) négatif. D'où les inégalités :

$$\rho_0^2 D^2 \leq \rho^2 (D-u)^2 < \left( -\frac{dp}{dv} \right)_\Gamma \quad (16)$$

Au front :  $\rho(D-u)_F = \rho_0 D$ , mais  $\left( -\frac{dp}{dv} \right)_F > \rho_0^2 D^2$

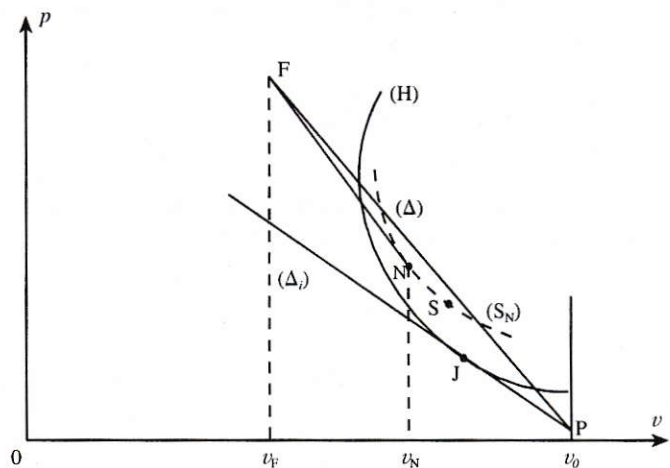


FIG. XVI-5.

La courbe de combustion d'une onde de détonation forte est toute entière *au-dessous* de la droite polaire, et ne lui est pas tangente en F.

Elle est tangente en N à l'isentrope ( $S_N$ ), le long de laquelle se poursuit la détente hors zone de réaction. Le point sonique S se trouve sur ( $S_N$ ), au-dessous du point N.

L'intégration de l'équation d'énergie de F à N le long de ( $\Gamma$ ) donne :

$$\begin{cases} e_N - e_F + \text{aire sous } \widehat{FN} = Q_0 \\ e_F - e_0 = \text{aire du trapèze } \widehat{FP} \end{cases}$$



d'où :

$$e_N - e_0 - Q_0 = \text{aire du trapèze } \overline{FP} - \text{aire sous } \widehat{FN} > \text{aire du trapèze } \overline{NP}$$

et :

$$E_N - E_0 = e_N - e_0 - Q_0 > \frac{1}{2} (p + p_0)(v_0 - v)_N$$

**La relation d'Hugoniot n'est pas valable pour une onde de détonation forte.**

Le point N est dans la zone  $H > 0$  (à l'intérieur de la courbe de Crussard), de sorte que la droite polaire ( $\Delta$ ) coupe nécessairement (H). D'où :

$$D > D_i$$

En appliquant à l'état N l'inégalité (16), on a :

$$\left(-\frac{dp}{dv}\right)_N = (\rho^2 c^2)_N > \rho^2 (D - u)_N^2$$

ou :

$$D - u_N < c_N$$

ce qui confirme que l'état de détonation est subsonique.

Le lieu des états de détonation forte est une courbe fonction du type d'onde considérée (Mach, sphérique convergente...), située à l'intérieur de la courbe de Crussard, et non sur la branche supérieure de celle-ci comme dans la théorie ZND (sauf pour la surdétonation plane, et encore à titre provisoire).

## 6. ONDES SONIQUES DANS LA ZONE DE RÉACTION

La détente créée par les réactions chimiques s'exerce par le jeu d'ondes soniques se propageant dans la zone de réaction dans les deux sens, avec un mouvement permanent ou instationnaire selon les cas. La preuve de leur existence est donnée par leur effet sur le choc transmis à un milieu inerte accolé à l'explosif ainsi que nous le verrons au chapitre XVIII.

Comme pour l'écoulement derrière une onde de choc, la mise en évidence des ondes soniques commence par la recherche des *lignes caractéristiques*.

On revient aux équations de base de l'écoulement – équations (2) – qui, après élimination de  $dp/dt$  à l'aide de l'équation d'énergie, s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} + \rho c^2 (\vec{n} \cdot \text{grad } u + u \text{ div } \vec{n}) = \rho g Q_0 \frac{d\lambda}{dt} \\ \rho \frac{du}{dt} + \vec{n} \cdot \text{grad } p = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Soit une ligne  $x(t)$  de pente  $\delta x/\delta t = m$ . La dérivée le long de cette ligne est :

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + m \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} + m \vec{n} \cdot \text{grad}$$

d'où :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\delta}{\delta t} - (m - u) \vec{n} \cdot \text{grad}$$

Avec cette relation, on élimine les  $d/dt$  des équations (17) :

$$\begin{cases} \frac{\delta p}{\delta t} - (m - u) \vec{n} \cdot \text{grad } p + \rho c^2 \vec{n} \cdot \text{grad } u = \rho g Q_0 \frac{d\lambda}{dt} - \rho c^2 u \text{ div } \vec{n} \\ \rho \frac{\delta u}{\delta t} - \rho (m - u) \vec{n} \cdot \text{grad } u + \vec{n} \cdot \text{grad } p = 0 \end{cases}$$

On élimine  $\vec{n} \cdot \text{grad } p$ , d'où :

$$\begin{aligned} \frac{\delta p}{\delta t} + \rho (m - u) \frac{\delta u}{\delta t} + \rho [c^2 - (m - u)^2] \vec{n} \cdot \text{grad } u \\ = \rho g Q_0 \frac{d\lambda}{dt} - \rho c^2 u \text{ div } \vec{n} \end{aligned}$$

Remarquons que si l'on prend  $m = D$ , cette dernière équation n'est autre que l'équation (12). Mais dans le présent problème, il s'agit de n'avoir au premier membre que les dérivées  $\delta/\delta t$ , donc de faire disparaître le terme en  $\vec{n} \cdot \text{grad } u$ . Pour cela, il faut prendre :

$$(m - u)^2 = c^2, \quad \text{soit} \quad m = u \pm c$$

On retrouve les lignes caractéristiques classiques de l'écoulement monodimensionnel :

– les lignes ( $C^+$ ), de pente  $\frac{\delta x^+}{\delta t} = u + c$ , ou *ondes montantes*.

– les lignes ( $C^-$ ), de pente  $\frac{\delta x^-}{\delta t} = u - c$ , ou *ondes descendantes*.



Les équations caractéristiques sont :

$$\frac{\delta p^+}{\delta t} + \rho c \frac{\delta u^+}{\delta t} = \frac{\delta p^-}{\delta t} - \rho c \frac{\delta u^-}{\delta t} = \rho g Q_0 \frac{d\lambda}{dt} - \rho c^2 u \operatorname{div} \vec{n} \quad (18)$$

Ces équations ne diffèrent de celles de l'écoulement plan (chapitre V) que par le dernier membre, qui n'est pas nul, et qui exprime le fait que l'écoulement peut être cylindrique ou sphérique, et qu'en outre, le milieu est réactif.

Pour que les (C<sup>+</sup>) et (C<sup>-</sup>) soient des ondes soniques, il faut qu'elles propagent une variation non nulle de l'état du milieu, ce qui est le cas dans la zone de réaction. Comme d'habitude, la nature des (C<sup>+</sup>) est donnée par le signe de  $\delta p^+/\delta t$ , et celle des (C<sup>-</sup>) par le signe de  $\delta p^-/\delta t$ .

**Ondes explosives.**

Pour simplifier, on prend le cas d'une onde permanente. Dans le plan (x, t), les valeurs de p et u sont constantes le long de toute droite parallèle à la trajectoire du front, de sorte que les écarts Δp et Δu entre deux de ces droites sont indépendantes de toute sécante. On a donc :

$$\frac{\delta p^+}{\delta u^+} = \frac{\delta p^-}{\delta u^-} = \frac{dp}{du} = \rho(D - u) \quad (19)$$

Puisque par hypothèse l'onde est permanente, l'équation (12) donne la valeur du dernier membre de (18) :

$$\rho g Q_0 \frac{d\lambda}{dt} - \rho c^2 u \operatorname{div} \vec{n} = \rho [c^2 - (D - u)^2] \vec{n} \cdot \operatorname{grad} u$$

Compte-tenu de (19), les équations (18) deviennent :

$$\left(1 + \frac{c}{D - u}\right) \frac{\delta p^+}{\delta t} = \left(1 - \frac{c}{D - u}\right) \frac{\delta p^-}{\delta t} = \rho [c^2 - (D - u)^2] \frac{\partial u}{\partial x}$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{\delta p^+}{\delta t} &= \rho(D - u)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{c}{D - u} - 1\right) \\ \frac{\delta p^-}{\delta t} &= -\rho(D - u)^2 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{c}{D + u} + 1\right) \end{aligned} \quad (20)$$

$\delta p^-/\delta t$  est toujours négatif : les (C<sup>+</sup>) sont des ondes de détente. Par contre,  $\delta p^+/\delta t$  change de signe au point sonique : les (C<sup>-</sup>) sont des ondes de compression dans la zone subsonique (entre F et S), et des ondes de détente au-delà.

Le mouvement des ondes ( $C^+$ ) et ( $C^-$ ) dans la zone de réaction est *permanent* : leurs trajectoires se déduisent l'une de l'autre par une translation parallèle au front (fig. XVI-6).

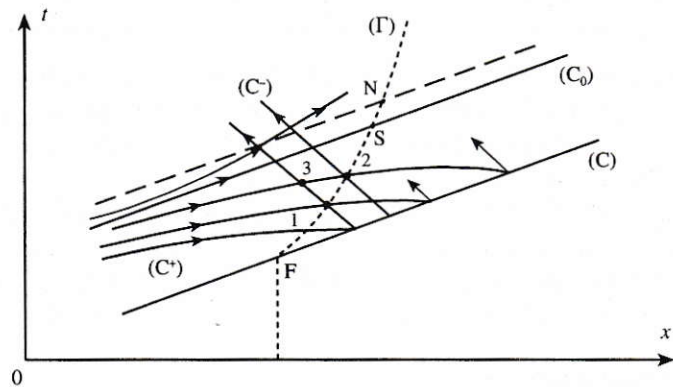


FIG. XVI-6.

Le lieu de l'état sonique est une droite ( $C_0$ ) parallèle au front ( $C$ ). C'est une ( $C^+$ ) particulière, de vitesse  $u + c = D$ , qui partage les autres ( $C^+$ ) en deux groupes : dans la zone subsonique,  $u + c > D$  et les ondes ( $C^+$ ) progressent vers le front avec une vitesse croissante ; dans la zone supersonique,  $u + c < D$  et les ondes ( $C^+$ ) s'éloignent du front. Elles admettent toutes la ligne ( $C_0$ ) comme asymptote.

La fig. XVI-6 illustre les considérations de signe sur  $\delta p^+$  et  $\delta p^-$ . On a :

$$p_1 > p_2 > p_3$$

d'où :

$$\begin{cases} \delta p^+ = p_2 - p_3 > 0 \rightarrow (C^-) = \text{compression} \\ \delta p^- = p_3 - p_1 < 0 \rightarrow (C^+) = \text{détente} \end{cases}$$

L'existence des ondes ( $C^+$ ) et ( $C^-$ ) est liée à celle des réactions chimiques. L'onde explosive est protégée des détentes extérieures par la supersonicité de son état de détonation, mais par un processus intrinsèque original, dû à la nature du milieu, elle crée ses propres détentes internes, en l'occurrence les ondes ( $C^+$ ). Celles-ci peuvent se propager librement dans la partie subsonique de la zone de réaction sans altérer la permanence de l'écoulement : en effet, elles se réfléchissent sur le front en ondes ( $C^-$ ) qui sont des ondes de compression, ce qui permet de maintenir constant l'état ( $p, u$ ) sur toute ligne parallèle au front.



**Détonations fortes.**

La vitesse du front étant variable en général, l'état  $(p, u)$  varie le long de toute ligne  $(C')$  de même pente que le front, de sorte que les écarts  $\Delta p$  et  $\Delta u$  entre deux lignes  $(C')$  dépendent de la sécante  $x(t)$ . Il n'y a donc pas de relation simple entre  $\delta p^+/\delta u^+$ ,  $\delta p^-/\delta u^-$  et  $dp/du$ .

Toutefois, l'état varie beaucoup moins le long d'une  $(C')$  que le long d'une trajectoire matérielle  $(\Gamma)$ .

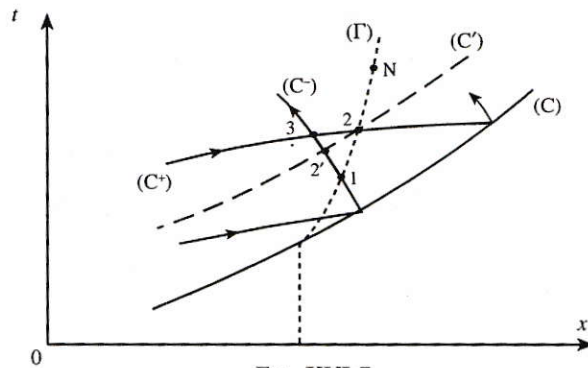


FIG. XVI-7.

On a donc :

$$p_{2'} \neq p_2 \quad \text{et} \quad p_1 > p_2$$

d'où :

$$p_1 > p_{2'} \rightarrow \delta p^- < 0$$

Les  $(C^+)$  sont des *ondes de détente*.

Comme  $p$  décroît le long de  $(C^-)$ , on a :

$$p_3 < p_{2'} \quad \text{d'où} \quad p_3 < p_2 \rightarrow \delta p^+ > 0$$

Les  $(C^-)$  sont des *ondes de compression*.

La différence avec les ondes explosives est la non-existence du point sonique dans la zone de réaction, donc l'absence de la ligne  $(C_0)$  et le changement de nature des ondes  $(C^-)$  : celles-ci restent des ondes de compression dans toute la zone de réaction.

Le mouvement des  $(C^+)$  et des  $(C^-)$  n'est pas permanent. Les ondes  $(C^+)$  propagent non seulement la détente due aux réactions chimiques, mais aussi les détentes extérieures puisque celles-ci peuvent pénétrer dans la zone de réaction.

Les ondes ( $C^+$ ) et ( $C^-$ ) ont été présentées ici, dans le cas des écoulements monodimensionnels, sous forme de lignes caractéristiques  $x(t)$ . Dans l'espace, ce sont des surfaces d'onde qui dans le présent cas sont parallèles ou concentriques au front. Les mêmes causes produisant les mêmes effets, elles existent dans la zone de réaction de toute onde de détonation sous forme de surfaces d'onde ( $C^+$ ) et ( $C^-$ ), se propageant dans l'un et l'autre sens. Mais leur géométrie est moins simple que dans les ondes monodimensionnelles.